## Vjerojatnost pogreške simbola

U ovom će dijelu biti objašnjeno određivanje vjerojatnosti pogrešnog prijema simbola u idealnom kanalu prijenosa. Na izlazu prijemnog filtra prijemnik (*Slika 6.6*) uzorkuje sumu signala i Gaussova šuma i uzorke uspoređuje s pragovima odluke. Prijenos je *M*-naran, dakle prenosi se *M* različitih simbola koji nastupaju s jednakim vjerojatnostima. Uzorci simbola poprimaju vrijednosti *amym*(*kT*N). Koeficijent *am* je element *M*-narnog skupa koeficijenata. U binarnom prijenosu *am* poprima vrijednosti ±1 ili 0 i 1, u kvaternarnom ±1, ±3, itd. Uvedimo pragove odluke *o*1 i *o*2 proizvoljno smještene oko uzorka *m*-tog simbola kojeg promatramo u *t* = 0, *ym* (0) = *ym*0. Pragovi odluke su istosmjerni naponi u određenom odnosu prema veličini uzoraka simbola. Djelovanje šuma je aditivno, pa prijemnik uspoređuje uzorak simbola i šuma *amym*0 + *n*0 s pragovima odluke *o*1 i *o*2 (). Pogreška u prijemu simbola nastaje kada je uzorak simbola i šuma *amym*0 + *n*0 > *o*2 ili *amym*0 + *n*0 < *o*1. Prvi slučaj nastupa ako su predznaci simbola i šuma jednaki, a drugi ako su predznaci suprotni.



*Slika 6.8 Određivanje vjerojatnosti pogreške simbola*

Na slici je prikazana Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti *p*(*x*) sa srednjom vrijednosti jednakoj nuli pomaknuta za vrijednost uzoraka simbola *amym*0:

 (6.24)

Vjerojatnost pogreške simbola *Pm* jednaka je zbroju vjerojatnosti:

 (6.25)

Ove integrale nije moguće riješiti u analitičkom obliku već ih pretvaramo u funkciju pogreške *erf*(*x*) ili komplementarnu funkciju pogreške *erfc*(*x*) koje su tabelirane, a moguće ih je izračunati i iz pogodnih aproksimacija. Funkcija pogreške određena je s jednakosti:

 (6.26)

Pomoću supstitucije  prvi integral u izrazu (6.25) prelazi u:



Drugi integral pomoću jednake supstitucije prelazi u:



Navedimo još da je potrebno primijeniti jednakost *erf*(-*x*)= 1 – *erf*(x). Izraz za vjerojatnost pogreške simbola glasi:

 (6.27)

Vjerojatnost pogreške *Pm* jednaka je osjenčanoj površini ograđenoj pragovima odluke i funkcijom gustoće vjerojatnosti na slici (). U prijenosu *M* simbola vjerojatnosti pogreške *P*e jednaka je srednjoj vrijednosti vjerojatnosti pogrešaka *Pm* svih *M* simbola

*M*

*P*e = *E*[*Pm*] = (1/*M* ) ∑ *Pm* (6.28)

*m*=1

Vjerojatnost pogreške *P*e je minimalna u odnosu na odabir pragova odluke, ako su pragovi odluke između susjednih simbola jednaki polovini zbroja veličina uzoraka tih simbola. U binarnom prijenosu uzorci simbola su *d* i –*d*, a prag odluke je 0. U kvaternarnom prijenosu uzorci simbola su: *a*1*y*10 = *d*, *a*2*y*20 = –*d*, *a*3*y*30 = 3*d*, *a*4*y*40 = –3*d*. Sukladno tome, pragovi odluke su: 0, 2*d* i –2*d*.

Određivanje vjerojatnosti pogreške binarnih simbola prikazano je na slici (*Slika 6.9*). Prag odluke je 0. Vjerojatnost pogreške pojedinih simbola je *Pm*/2. Razlog tome je što pogrešku simbola uzrokuje samo napon šuma *n*0 suprotnog predznaka od predznaka simbola. U prijenosu *M* simbola je stoga vjerojatnost pogreške:

 (6.29)

Za *M* = 2 slijedi:

 (6.30)

Uvrštenjem za *a*2*y*20 = *d* i *a*1*y*10 = –*d* slijedi:

 (6.30)



*Slika 6.9 Određivanje vjerojatnosti pogreške binarnih simbola*

Pokažimo još određivanje vjerojatnosti pogreške u primjeni pseudoternarnog prijenosa (AMI kod). U pseudoternarnom prijenosu postoji statistička ovisnost između simbola. Izraz (6.28) ne može se primijeniti u prikazanom obliku. Poznato je da u pseudoternarnom prijenosu koristimo tri simbola: *a*1*y*10 = –*d*, *a*2*y*20 = 0 i *a*3*y*30 = *d* (*Slika 6.9*). Pragovi odluke su *d*/2 i –*d*/2. Vjerojatnost pogreške odrediti ćemo pomoću dva praga odluke za svaki simbol (*Slika 6.10*). Za simbol veličine –d pragovi odluke su *o*1 = -∞ i *o*2 = -*d*/2. Za simbol 0 pragovi odluke su *o*1 = -*d*/2 i *o*2 = *d*/2, i za simbol *d* pragovi su *o*1 = *d*/2 i *o*2 = ∞. Vjerojatnosti pogreške simbola određujemo iz izraza (6.27):

  

Srednju vjerojatnost pogreške izračunati ćemo tako da vjerojatnosti pogreške simbola pomnožimo s vjerojatnostima nastupa simbola. Srednja vjerojatnost *P*e jednaka je zbroju svih vjerojatnosti. U slučajnom slijedu pseudoternarnih simbola, simbol *d* nastupa s vjerojatnosti 1/4, simbol –*d* također s 1/4 i 0 s vjerojatnosti 1/2. Vjerojatnost pogreške je:

 (6.31)



*Slika 6.10 Određivanje vjerojatnosti pogreške pseudoternarnih simbola*

Prilikom određivanja karakteristika optimalnih filtra omjer *S*/*N* bio je određen izrazom (6.17) jer se radilo o prijenosu jednog simbola. U prijenosu *M* simbola, energije simbola mogu biti različite, pa omjer *S*/*N* definiramo kao omjer srednjeg napona uzoraka simbola *y*(*kT*N) i srednjeg efektivnog napona šuma na izlazu prijemnog filtra:

 (6.32)

Veličina *E*[|*y*(*kT*N)|2] je srednja energija uzoraka simbola. Varijanca šuma *σ*2 jednaka je srednjoj snazi šuma na izlazu prijemnog filtra:

 (6.33)

pa je *σ* u izrazima (6.24) do (6.31) srednji efektivni napon šuma na izlazu prijemnog filtra. Srednja energija simbola na izlazu predajnog filtra je:

 (6.34)

Veličina  je srednja snaga simbola, a  je srednja energija simbola. U *M*-narnom prijenosu srednja je energija simbola:

 (6.35)

Omjer *S*/*N* na izlazu usklađenog prijemnog filtra u skladu s izrazima (6.22) i (6.32) jednak je:

 (6.37)

Srednja je snaga šuma prema izrazima (6.19) i (6.33) *P*n = *σ*2 = *N*0. U izrazu (6.37) srednja energija simbola raste s porastom *M*. Srednja je snaga simbola na ulazu u prijenosne sustave (vodove za prijenos podataka) ograničena. Ograničimo li srednju energiju simbola na  za sve *M*, može se napisati jednakost:

 (6.38)

To znači da umjesto simbola ±*d*, ±3*d*, ..., ±(*M* – 1)*d* prenosimo simbole veličine ±*d*1, ±3*d*1, ..., ±(*M* – 1)*d*1 gdje je:

 (6.39)

Omjer *S*/*N* je:

 (6.40)

Opći je izraz za vjerojatnost pogreške u *M*-narnom idealnom kanalu prijenosa:

 (6.41)

Uvrštenjem *d*1 iz (6.39) i , vjerojatnost pogreške jednaka je:

 (6.42)

odnosno:

 (6.43)

Omjer *S*/*N* u dB:

dB (6.44)

Tok vjerojatnosti pogreške u ovisnosti o omjeru *S*/*N* za binarni, kvaternarni i oktonarni prijenos prikazan je na slici (). Crtkano je prikazan tok vjerojatnosti pogreške za pseudoternarni prijenos. Srednja snaga simbola  jednaka je za sve krivulje.



Slika . Vjerojatnosti pogreške u ovisnosti o S/N odnosu u binarnom, pseudoternarnom, kvaternarnom i oktonarnom prijenosu

Udvostručenje broja simbola zahtijeva za jednaku vjerojatnost pogreške povećanje omjera *S*/*N* za približno 7 dB. Nagli porast omjera *S*/*N* je osnovni razlog što se u prijenosnom pojasu frekvencija primjenjuju binarni i pseudoternarni prijenos.